

**FORSCHUNGSPROJEKT**

„Zufall in neuen Räumen“

**GIDEON CHIUSOLE**

Elitestudiengang „Top-Math: Mathematik mit Promotion“

Technische Universität München, Januar 2023

## Zufall in neuen Räumen

Gideon Chiusole studiert im Elitestudienprogramm „TopMath: Mathematik mit Promotion“ an der Technischen Universität München. Im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes an der Technischen Universität Berlin untersucht er eine Verallgemeinerung der Theorie der abstrakten Wiener'schen Räume. Diese findet Anwendung in der mathematischen Beschreibung physikalischer und finanzmarkttheoretischer Modelle, welche durch zufällige Kräfte getrieben werden.

**Gaußsche Verteilungen** Man betrachte ein Teilchen, welches in einer Flüssigkeit schwimmt. Bei genauerem Hinsehen merkt man, dass das Teilchen nicht stillsteht, sondern einer Zitterbewegung (sog. Brownsche Bewegung) folgt. Der Grund für diese Bewegung ist, dass das Teilchen stets mit anderen Teilchen in der Flüssigkeit kollidiert und dadurch in seiner Bahn abgelenkt wird. Die Bewegungen der einzelnen Teilchen sind voneinander unabhängig, aber statistisch gleich. Dem zentralen Grenzwertsatz zufolge lässt sich damit folgende statistische Aussage treffen: Die Position des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt ist um den Ausgangspunkt herum Gaußsch verteilt. Je mehr Zeit verstreicht, umso größerer ist die Standardabweichung.

Mit dieser Erkenntnis hat man zwar (stochastisch) verstanden, wo sich ein Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden wird, aber nicht, wie es dorthin gekommen ist. Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, muss man als Zufallsvariable nicht die Position des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt, also einen Punkt im 3-dimensionalen Raum, betrachten, sondern den gesamten Pfad, ein Element in einem unendlich dimensional sog. Pfadraum.

Obgleich mathematisch wesentlich aufwendiger, so ist doch auch die Theorie auf unendlich dimensional Räumen (der abstrakten Wiener'schen Räume) strukturell reichhaltig und lässt tiefgreifende Aussagen zu – insbesondere über das Verhalten von Systemen, welche, wie das obige Beispiel, durch zufällige Kräfte getrieben werden.

## Mehr als nur ein Pfad

Zurück zum Teilchen in einer Flüssigkeit: Die zackige, raue Bewegung des Teilchens macht die mathematische Analysis mittels Differentialgleichungen (DGL) besonders heikel. Der Grund ist, dass DGLs nicht nur den Pfad selbst, sondern auch dessen Ableitung involvieren – ein, der Rauheit des Pfades geschuldet, sehr singuläres Objekt (eine sog. Schwartz-Distribution). Das Resultat ist, dass die DGL keine kanonische Bedeutung haben kann, denn es ist nicht klar, was es überhaupt bedeutet, eine Schwartz-Distribution mit einer Funktion zu multiplizieren. Erst in den letzten 25 Jahren wurde mehr und mehr verstanden, wie dieses Problem zu lösen ist und was die mathematische Bedeutung dieser Modelle ist. Es wurde erkannt, dass zur Analyse von Systemen mit solchen „rauen“ Variablen nicht nur die Information des Pfades (also wann das Teilchen wo ist), sondern zusätzliche „höhere“ Information (ein sog. Enhancement des Pfades) notwendig ist – es bildete sich die Theorie der sog. Rough Paths und später der Regularity Structures.

In dieser modernen Theorie werden Systeme nicht mehr durch „zufällige Kräfte“, sondern durch „Rough Paths“ getrieben – die Idee der Gaußschen Verteilungen bleibt aber die gleiche, nur dass nun nicht eine Gaußsche Verteilung auf einem Pfadraum, sondern ein Analogon auf einem Rough Path Raum studiert wird. Das Ziel des Projektes war es, Beiträge zur Verallgemeinerung der Theorie Gaußscher Verteilungen in den Kontext dieser neuen, „erweiterten“ Objekte zu leisten.

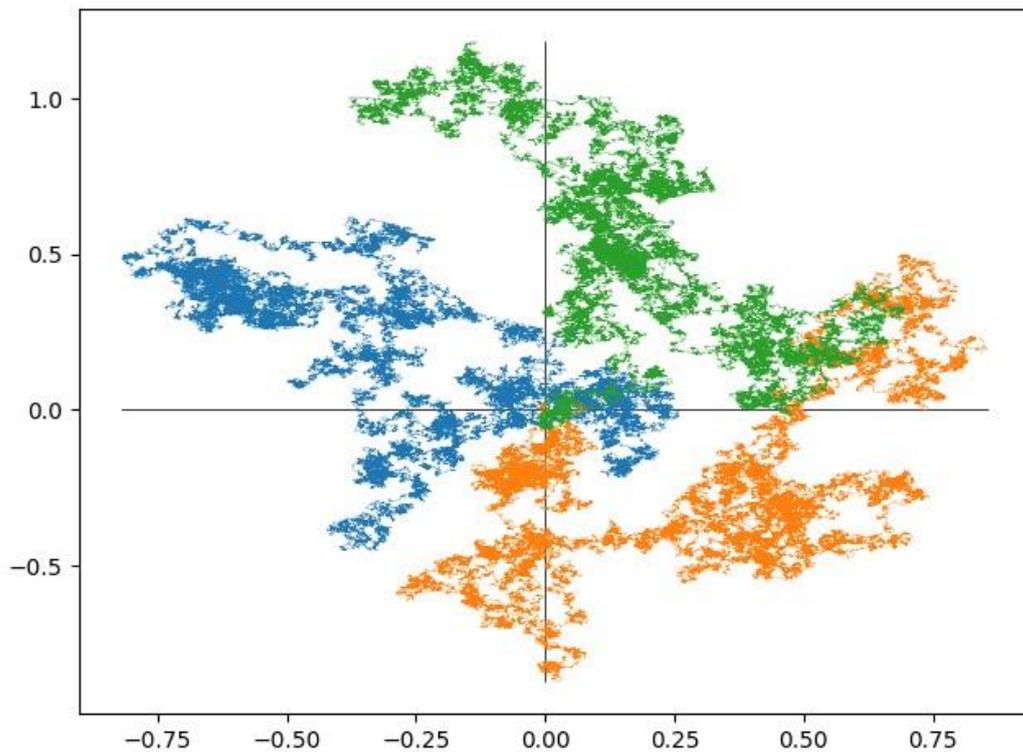


Abbildung 1: Drei Realisierungen einer Simulation einer Brownschen Bewegung, gestartet im Punkt  $(0,0)$ . Zu jedem Zeitpunkt wird das Teilchen in eine zufällige Richtung mit einer zufällig großen Kraft abgelenkt. Man beachte die Rauheit der Pfade

© Gideon Chiusole

Mehr zum Elitestudiengang:

🔗 [www.elitenetzwerk.bayern.de](http://www.elitenetzwerk.bayern.de)

🔗 [www.ma.tum.de/topmath](http://www.ma.tum.de/topmath)