Einblicke in die Forschungsarbeit

FORSCHUNGSPROJEKT

„Symmetrien & Singularitäten“

CLAUDIA STADLMAYR

Elitestudiengang „TopMath – Mathematik mit Promotion“

Technische Universität München, März 2021

Glatte und singuläre del Pezzo Flächen

Claudia Stadlmayr studiert Mathematik im Elitestudiengang TopMath an der Technischen Universität München (TUM). In einer gemeinsamen Forschungsarbeit mit Dr. Gebhard Martin (Bonn) beschäftigte sie sich mit Symmetrien bestimmter algebraischer Flächen, nämlich der „del Pezzo Flächen“. Anschließend beantwortete sie in einer eigenen Arbeit, die auch ihre Masterarbeit darstellt, die Frage, welche Typen von Singularitäten auf solchen Flächen auftreten.

Symmetrien glatter del Pezzo Flächen

Einer der wohl ältesten Zweige der Mathematik, die Geometrie, beschäftigt sich mit räumlichen Objekten, wie Punkten, Kurven, Flächen, etc. Im Fokus der algebraischen Geometrie steht das Verständnis spezieller geometrischer Objekte, der Varietäten. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie lokal Nullstellenmengen von Polynomen sind, was es erlaubt zu ihrer Erforschung Methoden der Algebra hinzuzuziehen.

Ein klassisches Resultat der algebraischen Geometrie besagt, dass eine Fläche im n-dimensonalen projektiven Raum mindestens Grad (n-1) hat. Nachdem Pasquale del Pezzo 1886 solche Flächen von minimalem Grad klassifiziert hatte, widmete er sich 1887 den Flächen vom nächsthöheren Grad. Solche algebraischen Flächen werden als Hommage an del Pezzos Arbeiten seither „del Pezzo Flächen“ genannt.

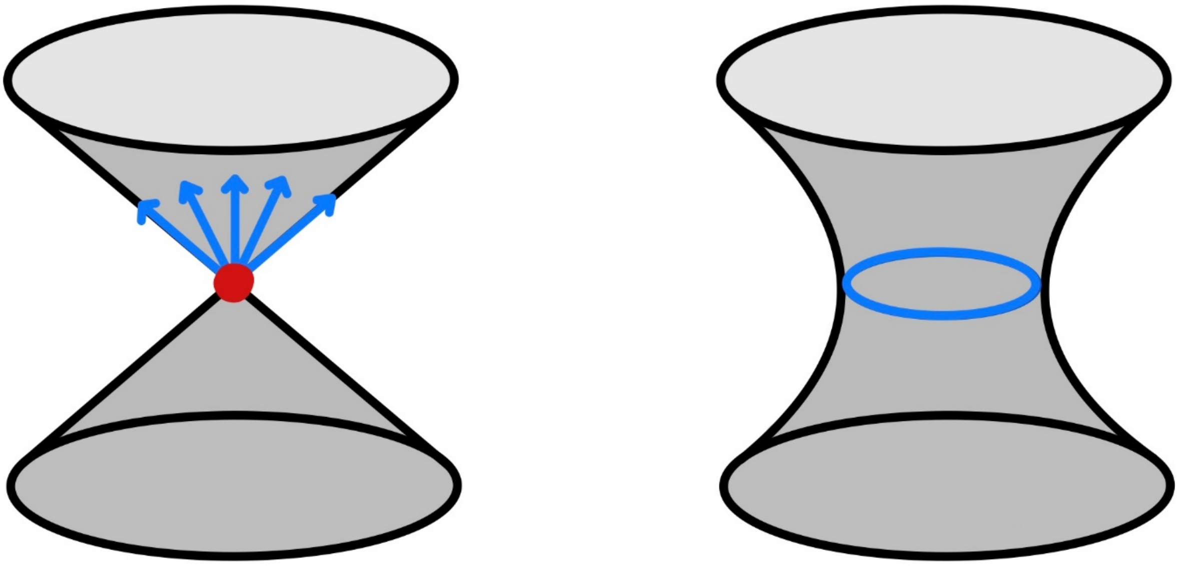
Auf der Suche nach den Symmetrien solcher Flächen stößt man schnell an Grenzen, da ihre Symmetriegruppen, auch Automorphismengruppen genannt, im Allgemeinen sehr groß und komplex sind. Wir verschaffen uns daher einen besseren Zugang durch den folgenden Standpunkt: Die Automorphismengruppe ist nach einem Resultat von Alexander Grothendieck, dem Begründer der „modernen algebraischen Geometrie“, nicht nur eine abstrakte Gruppe, sondern die Gruppe bestimmter Punkte eines reicheren geometrischen Objekts, des sogenannten Automorphismenschemas.

Mithilfe dieser modernen schema-theoretischen Struktur und der klassischen Beschreibung von del Pezzo Flächen als iterierte „Aufblasungen“ der projektiven Ebene, gelang es uns, alle glatten del Pezzo Flächen entsprechend ihrer Automorphismenschemata zu klassifizieren, was erfreulicherweise im Rahmen einer Vortragseinladung zum "ZAG-Marathon" bereits auf großes Interesse in der Fachwelt stieß.

Rationale Doppelpunkte auf singulären del Pezzo Flächen

Wenn man die Anforderung an del Pezzo Flächen glatt zu sein etwas aufweicht und stattdessen auch singuläre Punkte, sogenannte „rationale Doppelpunkte“ erlaubt, liefert dies eine weitere Klasse spannender del Pezzo Flächen.
Diese Singularitäten – man kann sie sich bildlich als Knicke oder kegelförmige Zuspitzungen vorstellen – zeichnen sich durch ihre besonders schönen Auflösungseigenschaften aus: Eine singuläre Varietät aufzulösen bedeutet eine glatte, also nicht singuläre, Varietät zu ihr zu assoziieren, die sich lediglich im singulären Punkt von der ursprünglichen unterscheidet.

Auf besonders anschauliche Weise lässt sich dies für Flächensingularitäten durch sogenannte „Aufblasungen“ erreichen, bei denen man sukzessive den singulären Punkt durch die Menge aller Tangentialrichtungen an diesem Punkt ersetzt und somit die Singularität „entzerrt“ oder „aufbläst“, solange bis wir eine glatte Fläche, die Auflösung, erhalten. Die rationalen Doppelpunkte zeichnen sich dadurch aus, dass sie so aufgelöst werden können und die Kurven, die die Tangentialrichtungen an die aufgeblasenen Punkte parametrisieren, sich in der Auflösung auf spezielle Weise schneiden. Faszinierenderweise wird dieses Schnittverhalten kodiert durch die an allen Ecken und Enden der Mathematik auf fast magische Weise auftauchenden Dynkin-Diagramme vom Typ A, D oder E.



Die A1 Singularität und ihre Aufblasung © Claudia Stadlmayr

Betrachten wir rationale Doppelpunkte über den komplexen Zahlen, also solche, die durch Polynome mit komplexen Koeffizienten gegeben sind, so entsprechen diese 1-zu-1 den Dynkin-Diagrammen. Stammen die Koeffizienten jedoch aus Zahlenräumen, in denen man nach p-fachem Aufaddieren der 1 die Zahl 0 erhält, so ist dies nicht unbedingt der Fall: Über Körpern der Charakteristik p=2, 3 und 5 gibt es mehrere rationale Doppelpunkte, die zum selben Dynkin-Diagramm gehören.

Unmittelbar stellt sich nun die Frage, welche dieser Arten rationaler Doppelpunkte auf del Pezzo Flächen vorkommen. Nachdem Patrick Du Val 1934 eine Antwort über den komplexen Zahlen gab, konnte Claudia Stadlmayr knapp 100 Jahre später in ihrer Masterarbeit und zweiten Forschungsarbeit die Frage über Körpern beliebiger Charakteristik abschließen und hatte bereits die Gelegenheit sie im Iskovskikh-Seminar in Moskau der Fachöffentlichkeit vorzustellen.

Mehr zum Elitestudiengang:

www.elitenetzwerk.bayern.de

Mehr zu Claudia Stadlmayr, ihren Arbeiten und Vorträgen:

https://www.groups.ma.tum.de/algebra/stadlmayr/

https://arxiv.org/pdf/2007.03665.pdf

https://arxiv.org/pdf/2009.14183.pdf

https://www.ma.tum.de/de/news-events/studium/topmath/aktuelles/claudia-stadlmayr-zag-marathon.html

https://www.ma.tum.de/en/news-events/studies-information/topmath/archive/topmath-talk-stadlmayr.html