



**MASTERARBEIT**

**„Wenige Gleichungen für viele Teilchen“**

**JOHANNES SEDLMEIR**

Elitestudiengang Theoretische und Mathematische Physik

Ludwig-Maximilians-Universität München und Technische Universität München,  
Dezember 2018

# Wenige Gleichungen für viele Teilchen

Johannes Sedlmeir hat im Elitestudiengang „Theoretische und Mathematische Physik“ an der Ludwig-Maximilians-Universität München und Technischen Universität München studiert. Dort hat er sich im Rahmen seiner Masterarbeit mit der mikroskopischen Begründung von effektiven Gleichungen beschäftigt.

## Wenige Gleichungen für viele Teilchen

Die allgemeine Gasgleichung oder ihre Spezialfälle wie das Gesetz von Boyle-Mariotte oder das Gesetz von Gay-Lussac, denen man im Schulunterricht begegnet, beschreiben Gase mit Hilfe von Größen wie Temperatur, Druck oder Volumen und stellen diese jeweils in einer einzigen Formel zueinander in Beziehung.

Dies mag überraschen, besteht doch ein Volumenteil Gas aus einer enormen Vielzahl von Atomen oder Molekülen, die man sich – zumindest in der nicht-quantenmechanischen Behandlung – mikroskopisch höchst dynamisch vorzustellen hat. Jedes Teilchen folgt einer komplizierten Bahn mit vielen Kollisionen. Eigentlich müsste man für ein vollständiges physikalisches Verständnis von Gasen also die Bewegung jedes einzelnen darin enthaltenen Teilchens kennen.

Offenbar genügen aber bereits wenige makroskopische Größen wie Druck und Volumen, um eine Vielzahl von Prozessen, bei denen man die Substruktur des Gases ohnehin nicht wahrnimmt, zufriedenstellend zu beschreiben.

Für allgemeine physikalische Systeme ist es eine komplizierte mathematische Fragestellung, ob man Größen identifizieren kann, die makroskopisch relevant, trotzdem aber einfach zu berechnen und zu messen sind. Man sucht also nach Größen, die überflüssige Details des komplizierten Systems geschickt ignorieren, aber gleichzeitig genügend Information beinhalten, dass nach wie vor eine hinreichend exakte Beschreibung oder Vorhersage von Prozessen möglich ist. Oft spielen hier Mittelwerte über das Teilchenensemble eine große Rolle.

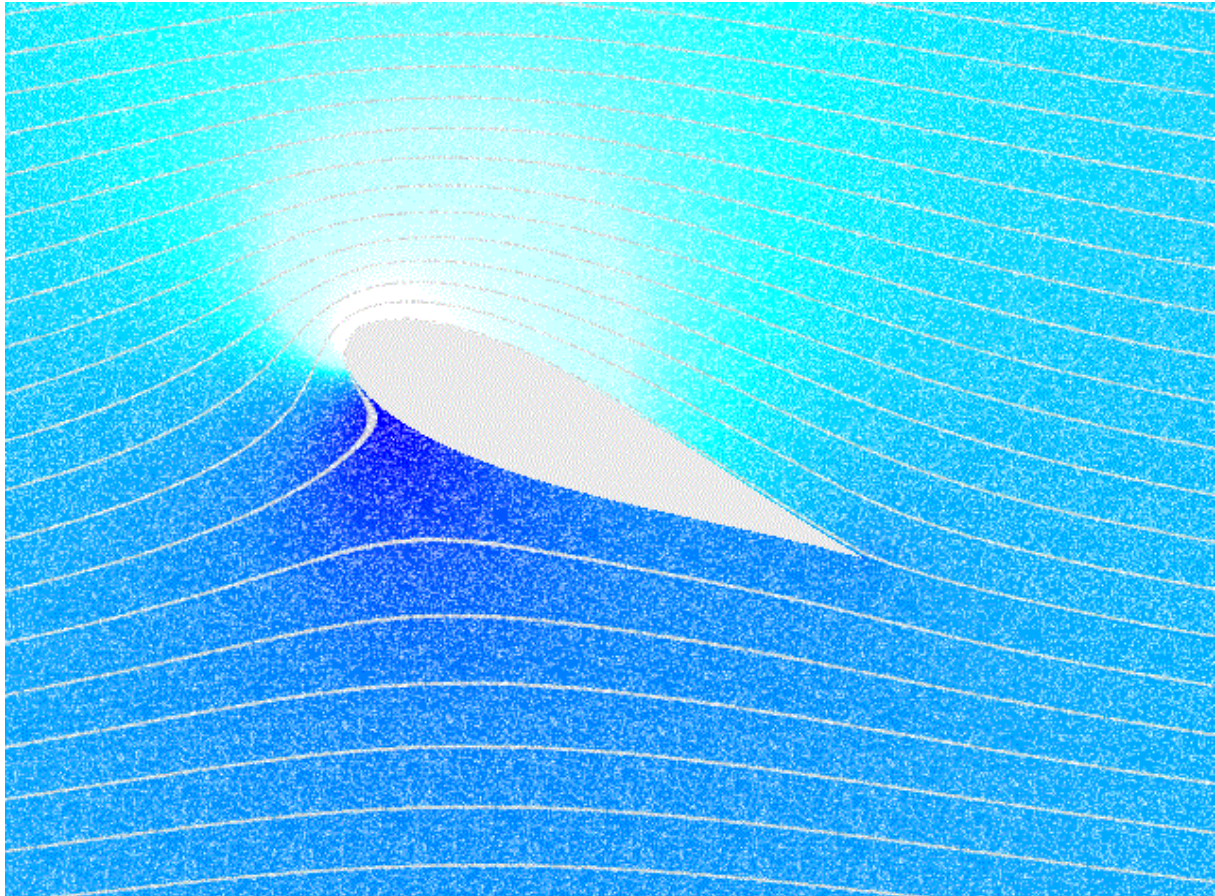
## Die Vlasov-Gleichung

Die oben beschriebene Gasgleichung liefert gute Resultate für eine homogene (gleichmäßige) Verteilung der Teilchen. Oftmals, etwa in Wasserstoffplasmen in Fusionsreaktoren oder in Galaxien – hier wäre jeder Stern ein „Teilchen“ - ist diese Annahme jedoch nicht zutreffend, da etwa durch Anziehungskräfte lokale Störungen eher wachsen statt sich auszumitteln. In diesem Fall ist man daran interessiert, die Verteilung - Orte mit hoher oder niedriger Dichte - zu verstehen und anhand der Anfangsverteilung zu prognostizieren. Seit den 1930er Jahren gibt es dafür eine heuristisch gewonnene Formel, die „Vlasov-Gleichung“.

In der mathematischen statistischen Physik will man mittels der bekannten mikroskopischen Gleichungen für die Bewegungen der einzelnen Teilchen eine einfache Gleichung für die Entwicklung des Gesamtsystems rigoros herleiten, also beweisen, dass unter bestimmten Voraussetzungen (hier: große Teilchenzahl) die effektive Gleichungen in einem bestimmten Sinne (etwa nur grobe räumliche Verteilung in bestimmten Zeitskalen) das System gut approximiert. Die größte Herausforderung bei diesem Beweis besteht darin, dass unter den Voraussetzungen der großen Teilchenzahl die Bahn der einzelnen Teilchen nicht einmal mit modernen Supercomputern bestimmt werden kann. Man will also beweisen, dass der Fehler zwischen vereinfachter und exakter Beschreibung klein ist, ohne die exakte Beschreibung überhaupt zu kennen. Eine typische Herangehensweise besteht dabei darin, zu beweisen, dass der momentane Zuwachs des (wegen unbekannter exakter Lösung ebenfalls unbekanntes) Fehlers stets nur proportional zu dem aktuellen Fehler

ist. Dann führt eine bekannte Abschätzung zu dem Resultat, dass der Fehler zumindest für hinreichend kurze Zeiten klein bleibt, wenn der (bekannte!) anfängliche Fehler klein ist (letzteres gilt dann wegen des Gesetzes der großen Zahlen).

Im Rahmen der Masterarbeit wurden die theoretischen Grundlagen, die für den mathematischen Beweis der Vlasov-Gleichung nötig ist, herausgearbeitet sowie bereits bestehende Beweise auf den Fall mehrerer Teilchensorten verallgemeinert.



Vielteilchendynamik um einen Flugzeugflügel

Rechte: Thierry Dugnolle, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18803279>

Mehr zum Elitestudiengang Theoretische und Mathematische Physik:

🔗 <https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/TMP/>

Weitere Informationen:

🔗 <https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/TMP/theses/thesissedlmeir.pdf>