



MASTERARBEIT

„Mischungszeiten für Teilchensysteme“

DOMINIK SCHMID

Elitestudiengang TopMath

Technische Universität München, Dezember 2018

Mischungszeiten für Teilchensysteme Otilien

Dominik Schmid studiert Mathematik im Elitestudiengang TopMath an der Technischen Universität München (TUM). Im Rahmen seiner Masterarbeit beschäftigte er sich 2018 mit Mischungszeiten für den Ausschlussprozess in zufälligen Umgebungen.

Interagierende Teilchensysteme – eine kurze Einführung

Interagierende Teilchensysteme sind in unserem Alltagsleben allgegenwärtig. Ein typisches Beispiel sind Moleküle in Flüssigkeiten oder Gasen, die sich mathematisch gut durch zufällige Bewegungen von Teilchen modellieren und verstehen lassen.

Zur Beschreibung der möglichen Aufenthaltsorte der Teilchen verwenden wir Graphen. Ein Graph ist gegeben durch eine endliche Menge an Positionen, den Knoten, und eine Menge an Kanten, die je zwei verschiedene Knoten miteinander verbinden. Ein elementares Beispiel für einen Graphen ist das Segment. Dabei werden die Knoten von 1 bis N für eine natürliche Zahl N durchnummeriert. Je zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in ihren Nummern um genau 1 unterscheiden.

Eines der am häufigsten untersuchten Beispiele für ein interagierendes Teilchensystem ist der Ausschlussprozess, den wir im Folgenden auf dem Segment betrachten wollen. Dieser Prozess lässt sich wie folgt beschreiben: Zu Beginn werden nicht-unterscheidbare Teilchen auf jeweils verschiedenen Knoten im Segment platziert, wobei auch Knoten unbesetzt bleiben dürfen. In jedem Zeitschritt wählen die Teilchen einen ihrer Nachbarknoten anhand einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung aus. Die Teilchen begeben sich nun zu dem ausgewählten Knoten, allerdings nur, wenn dieser nicht bereits schon besetzt ist. So wird insbesondere sichergestellt, dass jeder Knoten zu jedem Zeitpunkt stets durch maximal ein Teilchen besetzt ist und sich die Gesamtzahl der Teilchen mit der Zeit nicht ändert.

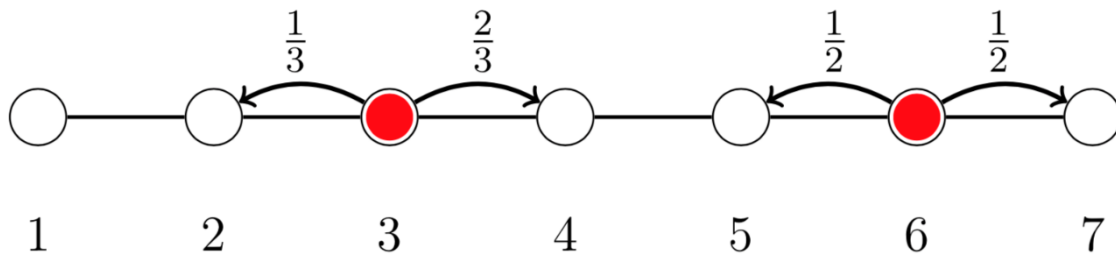
Mischungszeiten – wie schnell erreicht man ein Gleichgewicht?

Eine typische Fragestellung für interagierende Teilchensysteme ist die Untersuchung von Gleichgewichten. Anschaulich lässt sich ein Gleichgewicht dadurch beschreiben, dass ein interagierendes Teilchensystem, wenn es einmal das Gleichgewicht erreicht hat, sich anschließend immer in diesem befinden wird. Gleichgewichte sind im Allgemeinen nicht deterministisch, lassen sich aber durch Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben.

Für den Ausschlussprozess auf dem Segment kann man zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen sich für jede mögliche Anfangskonfiguration nach genügend langer Wartezeit ein Gleichgewicht einstellt. Wir möchten nun die Zeit bis zum Erreichen des Gleichgewichts für den Ausschlussprozess auf dem Segment für große Werte von N verstehen. Als Standardmaß zur Quantifizierung der Konvergenzgeschwindigkeit dient hierbei die Mischungszeit.

In vorangegangenen Arbeiten wurde die Mischungszeit für den Ausschlussprozess auf dem Segment im Fall von homogenen Umgebungen untersucht. Hierbei hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von den Positionen der Teilchen ab. Physikalisch können die Teilchen als geladene Moleküle interpretiert werden, auf die ein gleichmäßiges elektrisches Feld einwirkt. Falls dieses Feld eine konstante, positive Stärke aufweist, zeigt sich, dass die Mischungszeit proportional zur Größe des Segments wächst. Im Rahmen seiner Masterarbeit untersuchte der Autor die Mischungszeit für den Ausschlussprozess im Fall von inhomogenen Umgebungen mit zufälligen Übergangswahrscheinlichkeiten. Physikalisch können die Teilchen hierbei als in

einem ungleichmäßigen elektrischen Feld befindlich gesehen werden. Abhängig von ihrer jeweiligen Position wirkt jeweils eine andere Kraft auf die Moleküle. Dabei zeigt sich, dass die Mischungszeit im Allgemeinen größer ist als in einem vergleichbaren homogenen Fall und von zusätzlichen Charakterisierungen der Übergangswahrscheinlichkeiten abhängt.



Beispiel für den Ausschussprozess auf einem Segment der Größe 7 in einer inhomogenen Umgebung

Mehr zum Elitestudiengang TopMath:

🔗 <https://www.ma.tum.de/topmath>

Weitere Informationen:

🔗 <https://arxiv.org/pdf/1806.03937.pdf>