



MASTERARBEIT

„Probleme? Kein Problem!“

MAXIMILIAN MARTIN

Elitestudiengang MINT-Lehramt PLUS

Universität Bayreuth, Dezember 2018

Probleme? Kein Problem!

Maximilian Martin hat im Elitestudienprogramm „MINT-Lehramt PLUS“ an der Universität Bayreuth studiert. Im Rahmen seiner Masterarbeit am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik beschäftigte er sich mit der Förderung des Problemlösens mit einem Schwerpunkt auf Beweisen im Mathematikunterricht am Beispiel der Geometrie.

Problemlösen, eine wichtige mathematische Kompetenz

Fast täglich werden wir mit Problemen konfrontiert. Einige sind leicht zu lösen, andere bereiten uns Kopfzerbrechen. In einer immer schnelllebigeren Welt werden Schülerinnen und Schüler in Zukunft wohl Probleme lösen müssen, die heute noch völlig unbekannt sind. Speziell die Förderung der Kompetenz, Probleme mathematisch zu lösen, ist daher ein zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts. Hierdurch sollen Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, auch neue mathematische Probleme sicher lösen zu können.

In seiner Masterarbeit erläutert Maximilian Martin Modelle, welche die Prozesse des Problemlösens und Beweisens beschreiben, um darauf aufbauend Strategien, sogenannte Heurismen, zusammenzutragen, die beim Problemlösen hilfreich sein können. Konkrete Empfehlungen zur Umsetzung einer Problemlöse- und Beweiskultur, veranschaulicht an Beispielen, machen den besonderen Nutzen der Überlegungen für den Mathematikunterricht deutlich.

Probleme mathematisch lösen wird von der Kultusministerkonferenz in den Bildungsstandards für verschiedene Bildungsabschlüsse als allgemeine mathematische Kompetenz genannt. Sie ist somit ein zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts. Problemlösen kann dabei als mehrstufiger Prozess beschrieben werden: Er beginnt mit dem Verstehen des Problems. Es schließen sich das Erfinden eines Plans zur Lösung und die Ausführung desselben an. In einer Rückschau werden die Problemlöseaktivitäten reflektiert und noch einmal durchdacht.

Beim Erfinden eines Plans beziehungsweise allgemein beim Lösen eines Problems können sogenannte Heurismen hilfreich sein, von denen drei Typen unterschieden werden. Heuristische Hilfsmittel, wie das Erstellen einer Tabelle, können helfen, die vorhandenen Informationen zu strukturieren. Heuristische Strategien wie das Rückführen auf Bekanntes sind Vorgehensweisen, die eine Lösung liefern können, sobald das Problem verstanden wurde. Der dritte Typ, die heuristischen Prinzipien, ist deutlich stärker als die beiden anderen Typen an Fachinhalte und Voraussetzungen gebunden. Dies wird beispielsweise beim Symmetrieprinzip deutlich, bei dem Symmetrien gesucht oder hergestellt werden und welches vorwiegend (aber nicht ausschließlich) im geometrischen Kontext genutzt wird.

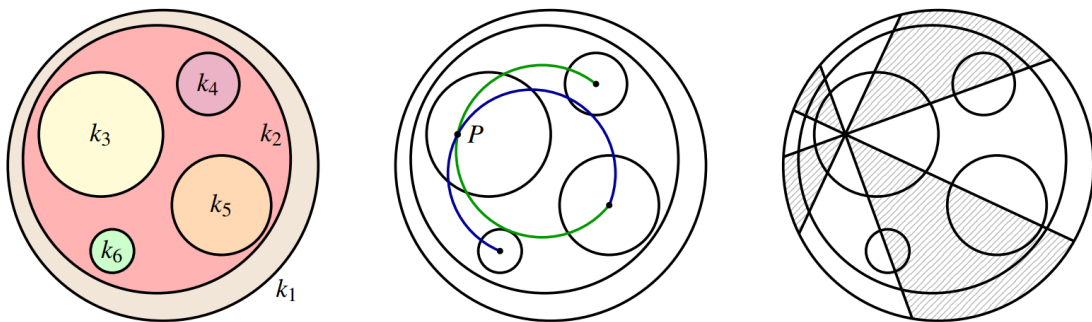
Beweise: Besondere Probleme

Ein Beweis ist die Begründung einer Aussage durch eine logische, lückenlose und schlüssige Argumentationskette (deduktiv) aus bereits bewiesenen Aussagen. Er stellt letztlich eine Spezialform von Problemen dar, weshalb die zuvor beschriebenen Heurismen auch zum Finden eines Beweises genutzt werden können.

Bei der Förderung der Problemlöse- und Beweiskompetenzen im Mathematikunterricht kann der Prozesscharakter des Problemlösens bzw. des Beweisens hilfreich sein. Es können beispielsweise einzelne

Teilhandlungen, die beim Problemlösen auftreten können, eingeübt werden. Außerdem können gezielt Heuristiken vermittelt werden, die Problemlösen und Beweisen vereinfachen können. Darüber hinaus können ausgearbeitete Lösungsbeispiele helfen, bei zukünftigen Problemen auf ein bereits bekanntes Lösungsschema zurückzugreifen, das Vorgeben von Puzzleteilen kann das Durchdringen der Struktur des Problemlöseprozesses unterstützen und Beweise ohne Worte, beispielsweise in Bilder gefasste geometrische Beweise, machen das Verstehen und gegebenenfalls konkretisieren einer fremden Beweisidee notwendig.

Maximilian Martin stellt in seiner Arbeit anhand von sieben Beispielen aus der Geometrie dar, wie eine Förderung der Problemlöse- und Beweiskompetenz anhand der oben beschriebenen Maßnahmen realisiert werden kann. Eines ist beispielsweise das "Pizza-Problem", das die Frage aufwirft, wie eine Pizza (inklusive Belag) fair zwischen zwei Personen geteilt werden kann.



Das Pizza-Problem und (s)ein Beweis in Bildern.

Rechte: Grafik von Maximilian Martin in Anlehnung an P. Chevanne. *The Pizza*. 2005. URL: http://mathafou.free.fr/pbg_en/pb116.html
("The Pizza")Künstler Benyamin Reich thematisiert

Mehr zum Elitestudiengang MINT-Lehramt PLUS:

🔗 <https://www.mint-lehramt-plus.bayern>

Weitere Informationen:

🔗 https://epub.uni-bayreuth.de/3848/Problemloesen_Beweisen.pdf