



MASTERARBEIT

„Schnell und langsam“

LUCA ARCIDIACONO

Elitestudiengang „TopMath“

Technische Universität München, Februar 2020

Analyse von Singularitäten durch Blow-up

Luca Arcidiacono studiert im Elitestudiengang „TopMath – Mathematik mit Promotion“ an der Technischen Universität München (TUM). Im Rahmen seiner Masterarbeit hat er sich mit dem Verhalten von Schnell-Langsam Systemen in der Nähe von Singularitäten beschäftigt.

Schnell-Langsam Systeme

Viele naturwissenschaftliche Probleme kommen mit mehreren Zeitskalen: Oszillatoren besitzen mechanische und elektrische Komponenten mit stark abweichenden Schwingungsfrequenzen, in Reaktoren laufen zeitgleich mehrere chemische Reaktionen mit unterschiedlichen Reaktionsgeschwindigkeiten ab, in Neuronen werden Nervenimpulse im Bruchteil einer Sekunde übertragen gefolgt von einer längeren Regenerationsphase. Diese Zeitskalen können weit auseinanderliegen, sodass wir schnelle sowie langsame Dynamiken erhalten. Die Modelle, die zur Beschreibung derartiger Phänomene verwendet werden, bezeichnen wir deshalb als Schnell-Langsam Systeme. Die häufigsten Vertreter solcher Systeme sind Differentialgleichungen und iterierte Abbildungen.

Aus mathematischer Sicht können diese Probleme durch eine Sammlung von Gleichungen beschrieben werden, die Separation in „Schnell“ und „Langsam“ erreichen wir durch Hinzufügen eines kleinen Parameters, der das Verhältnis zwischen schneller und langsamer Zeitskala beschreibt. Im Grenzfall, wenn der Parameter den Wert Null annimmt, ergibt sich hierbei ein strukturell gänzlich andersartiges Problem, wodurch sich die Analyse von Schnell-Langsam Systemen als besonders heikel herausstellt. Eine wichtige Fragestellung ist es, den zukünftigen Verlauf von Lösungskurven vorherzubestimmen und zu beschreiben, wie sich eine gegebene Menge von Anfangsdaten im Laufe der Zeit verändert.

Aufblasen von Gleichgewichtspunkten

Von besonderem Interesse sind Gleichgewichtspunkte – Zustände, die sich selbst nicht verändern, in deren Umgebung aber die unterschiedlichsten Dynamiken möglich sind. Um die Bewegungen in der Nähe von singulären Gleichgewichtspunkte zu untersuchen, nutzt Luca Arcidiacono die sogenannte Blow-up Methode, eine Technik, die aus dem Bereich der algebraischen Geometrie stammt, deren Nutzen sich aber auch bei der Untersuchung von dynamischen Systemen gezeigt hat. Anstelle nur eines Gleichgewichtspunktes wird nun ein höherdimensionales Objekt analysiert; der einzelne Punkt wird zu einer Kugel „aufgeblasen“. Auf diese Weise erschwert sich das Problem aufgrund komplizierterer Geometrie, man gewinnt im Gegenzug jedoch Eigenschaften, die es ermöglichen, bereits bekannte Resultate anzuwenden.

Möchte man die Gesamtheit einer Kugel überblicken, reicht die Sichtweise aus nur einer Richtung nicht aus, Teile der Kugel bleiben ungesehen. Deshalb werden Projektionen aus verschiedenen Blickwinkeln verwendet, um die ganze Kugel zu abzudecken. Zentraler Punkt der Arbeit ist die Fortführung einer speziellen Fläche durch die Umgebung des aufgeblasenen Punktes. Sie dient als Richtlinie für andere Anfangswerte in der Nähe, deren Lösungskurven sich mit der Zeit dieser besonderen Fläche annähern.

Mehr zum Elitestudiengang „TopMath“:

 www.ma.tum.de/topmath

Mehr zur Publikation im *Journal of Difference Equations and Applications*:

 www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080