



MASTERARBEIT

„Verwendung der Zerlegung-der-Eins in der
Finite Elemente Methode“

NIVESH DOMMARAJU

Elitestudiengang Bavarian Graduate School of Computational Engineering
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Dezember 2018

Verwendung der Zerlegung-der-Eins in der Finite Elemente Methode

Nivesh Dommaraju ist ein Absolvent des Master-Studiengangs „Computational Engineering“ der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg und Absolvent des Elitestudiengangs „Bavarian Graduate School of Computational Engineering“ (BGCE). Im Zuge seiner Masterarbeit arbeitete er an der Verwendung von Zerlegung-der-Eins Ansatzfunktionen in der Finite Elemente Methode.

Verbesserung der Finite Elemente Methode

Die Methode der finiten Elemente (FEM) wird genutzt um partielle Differenzialgleichungen, welche zur Modellierung zahlreicher natürlicher Phänomene verwendet werden, zu lösen. Sie verwendet sogenannte Ansatzfunktionen um eine ungefähre Lösung der Gleichungen zu bestimmen. Je näher eine solche Funktion an der exakten Lösung ist, umso besser ist die gewonnene Approximation. Diese Eigenschaft macht sich die Zerlegung-der-Eins Methode (PUM) zu Nutze. Sie verwendet Ansatzfunktionen die sich an bekannten Eigenschaften der Lösung orientieren.

Wenn beispielsweise bekannt ist, dass die Lösung in einem Bereich einer Gaußglocke ähnelt, dann kann eine Gauß-ähnliche Funktion als Ansatzfunktion durch die PUM genutzt werden. Abhängig vom Problem kann dies schneller sein als eine Verwendung des Standardansatzes mit der Finiten Elemente Methode, welcher abschnittsweise polynomielle Ansatzfunktionen verwendet.

Die Zerlegung-der-Eins-Methode besitzt Anwendungen im Bereich der Quantenmechanik um gekoppelte Eigenwertprobleme zu lösen. In der Kontinuumsmechanik wird sie bei elastischen Randwertproblemen geschichteter Materialien und bei der Simulation von Riss-Fortpflanzung verwendet.

Effiziente Implementierung der Zerlegung-der-Eins Methode

Bei Problemstellungen mit einer großen Anzahl an Bereichen ist die Verwendung der Zerlegung-der-Eins Methode komplex. So müssen beispielsweise bei überlappenden Bereichen die Ansatzfunktionen beiden Regionen entsprechen. Zusätzlich muss sicher gestellt werden, dass die Lösung auch an den Grenzen der Überlappung stetig ist.

Um die PUM nutzen zu können müssen Bereiche mit bekannten Lösungsnaherungen identifiziert werden. Eine universelle Implementierung benötigt also eine Liste an Bereichen mit zugehörigen Ansatzfunktionen. Eine derartige Implementierung findet sich in der Open-Source Bibliothek deal.II.

Nivesh entwickelte auf Basis der FEM-Datenstrukturen in deal.II einen Algorithmus der die genannten Probleme löst. Dazu wurde ein Graphenfärbungsalgorithmus genutzt um die Verbindungen zwischen den Unterbereichen zu kodieren. Dies führte zu einer Verringerung der Platzkomplexität der verwendeten PUM-Datenstrukturen.

Für eine vorgegebene Diskretisierung führt die entwickelte Implementierung zu einer genaueren Lösung im Vergleich zum Standard-FEM Ansatz. Es ist zu erwarten, dass die Verbesserung der Lösung mit der Komplexität des Eingabeproblems steigt, beispielsweise bei Lösungen mit starken Schwankungen oder oszillierenden Komponenten.

Mehr zum Elitestudiengang Bavarian Graduate School of Computational Engineering:

🔗 <http://www.bgce.de/>

Weitere Informationen:

🔗 https://www.dealii.org/developer/doxygen/deal.II/structColorEnriched_1_1Helper.html