



MASTERARBEIT

„Kurven und Körper“

Naemi Fischer

Elitestudiengang „MINT-Lehramt PLUS“

Universität Bayreuth, 2022

Kurven und Körper

Naemi Fischer hat im Elitestudienprogramm „MINT-Lehramt PLUS“ an der Universität Bayreuth studiert. Im Rahmen ihrer Masterarbeit am Lehrstuhl für Computeralgebra hat sie sich mit Modulräumen hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht 2 und damit in Verbindung stehenden Zahlkörpern beschäftigt. Basierend auf theoretischen Überlegungen erstellte und analysierte sie eine Datenbank über solche Körper.

Mathematik als Wissenschaft der Klassifikation

„Mathematics is the classification and study of all possible patterns.“

So formulierte der englische Wissenschaftler W.W. Sawyer im Jahre 1955, was auch heute noch Ziel der Mathematik ist: Objekte zu klassifizieren, indem man sie durch präzise Definitionen voneinander abgrenzt, aber auch durch verschiedene Sätze Zusammenhänge zwischen ihnen herstellt. Um solche zu finden kann es hilfreich sein, sich zunächst Beispiele anzuschauen und nach Mustern zu suchen.

Dieser Tradition folgte Naemi Fischers Masterarbeit. Die Analyse der erstellten Datenbank soll zu einem besseren Verständnis für bestimmte Kurventypen, Zahlkörper und deren Beziehungen beitragen.

Hyperelliptische Kurven von Geschlecht 2 und deren Modulräume

Bei hyperelliptischen Kurven, die zu den wesentlichen Untersuchungsgegenständen der Arbeit zählen, handelt es sich um geometrische Objekte, die beispielsweise in der Kryptographie Anwendung finden. Grob gesagt sind sie durch eine Gleichung der Form

$$y^2 = f(x)$$

gegeben, wobei f ein Polynom ist. Man sagt, dass ein Punkt (ξ, η) auf der Kurve liegt, wenn er die obige Gleichung erfüllt, also $\eta^2 = f(\xi)$ gilt.

Das Geschlecht einer hyperelliptischen Kurve ist eine bedeutende Invariante, welche man am Grad des Polynoms f in der Kurvengleichung ablesen kann. Im Rahmen der Masterarbeit spielten lediglich Kurven vom Geschlecht 2 eine Rolle; hier hat f Grad 5 oder 6.

Eine zentrale Idee der algebraischen Geometrie ist es, Varietäten danach zu klassifizieren, wie gut sie sich mit Abbildungen ineinander überführen lassen. Besonders „schöne“ Abbildungen sind Isomorphismen, da sie viele wesentliche Eigenschaften der Varietäten unverändert lassen. Man kann daher hyperelliptische Kurven in Klassen einteilen, je nachdem, ob es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt oder nicht. Die Menge dieser Isomorphieklassen hat eine sehr schöne zusätzliche Struktur. Man spricht deshalb von einem Modulraum von Kurven. Ein Hauptaspekt des theoretischen Teils dieser Masterarbeit war es, die Struktur solcher Modulräume genauer zu beschreiben und zu erklären, wie man algebraische Modelle für diese Objekte bekommt.

Zahlkörper und Modulräume

Körper sind in der Mathematik Mengen mit bestimmten Eigenschaften. Wichtige Beispiele sind die rationalen oder die reellen Zahlen.

Algebraische Zahlkörper sind hiervon ein Spezialfall. Es handelt sich dabei um endliche Körpererweiterungen der rationalen Zahlen. Es stellt sich heraus, dass man unter geeigneten Bedingungen Kurvenklassen aus Modulräumen derartige Zahlkörper zuordnen kann.

Datenbank und Ergebnisse

Basierend auf vorliegenden Beispielen erstellte Naemi Fischer unter Zuhilfenahme des Computeralgebrasystems Magma eine Datenbank über die entsprechenden Körper. Dazu berechnete sie zahlreiche Kenngrößen, sortierte die Daten, und glich sie mit einer der größten momentan vorhandenen Zahlkörperdatenbanken, nämlich der des L-Functions and Modular Forms Database (LMFDB), ab.

Die Analyse der Daten zeigte einige interessante Zusammenhänge auf, die Ausgangspunkte für weitere Forschung liefern könnten. Beispielsweise hatten besonders viele der auftretenden Zahlkörper viele komplexe Einbettungen, betragsmäßig kleine Diskriminanten, und Galoisgruppen, welche isomorph zur vollen symmetrischen Gruppe des jeweiligen Grades sind.

Auch die Datenbank selbst, welche ungefähr 200,000 verschiedene Körper umfasst, kann für weitere Forschung hilfreich sein. Die LMFDB hat zudem bereits Interesse bekundet, ihre Zahlkörperdatenbank durch die in dieser Arbeit gefundenen Daten zu erweitern.

Mehr zum Elitestudiengang:

www.elitenetzwerk.bayern.de

www.iimmune.nat.fau.de

www.mint-lehramt-plus.bayern/

www.computeralegebra.uni-bayreuth.de

www.lmfdb.org