



MASTERARBEIT

„PDEs und der Zufall“

Henrik Reger

Elitestudiengang „Scientific Computing“

Universität Bayreuth, 2021

Die Lösung stochastischer PDEs

Henrik Reger hat im Elitestudiengang „Scientific Computing“ an der Universität Bayreuth studiert. In seiner Masterarbeit beschäftigte er sich am Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen mit der effizienten numerischen Lösung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen.

Der deterministische Fall

Die Modellierung vieler Prozesse aus verschiedenen Bereichen, vor allem aus den Natur- und Ingenieurwissenschaften, führt zu partiellen Differentialgleichungen (PDEs), die in Ermangelung einer berechenbaren analytischen Lösung numerisch gelöst werden müssen. Für elliptische deterministische PDEs gibt es effiziente numerische Algorithmen, insbesondere die Finite-Elemente-Methode, die auf einem soliden theoretischen Rahmen aufbaut und in der Praxis effizient umgesetzt werden kann.

Vom Determinismus zum Zufall

Eine deterministische Beschreibung kann unzureichend sein, um ein Problem in seiner ganzen Komplexität zu beschreiben. Aus verschiedenen Gründen dürfen stochastische/statistische Einflüsse nicht ignoriert werden. Erstens kann der Prozess eine intrinsische Unregelmäßigkeit aufweisen, die berücksichtigt werden muss, wie dies bei der kinetischen Gastheorie oder bei Quanteneffekten der Fall ist. Zweitens kann das Wissen über den Prozess aufgrund der Ungenauigkeit der Messgeräte begrenzt sein.

Trennung von Zufallsvariablen und Ort

Der erste Schritt ist die Entkopplung von räumlichen und stochastischen Variablen mit Hilfe einer Karhunen-Loève Reihenentwicklung. Dadurch kann die zugrundeliegende bivariate Funktion als unendliche Summe von Produkten zweier univariater Funktionen aufgefasst werden. Für die effiziente numerische Lösung ist dieser Schritt von besonderer Bedeutung, da hierdurch „der Ort vom Zufall getrennt wird“.

Weiteres Vorgehen – stochastische Galerkin-Methode

Durch Abschneiden der unendlichen Summe werden die stochastischen Informationen in eine endliche Anzahl von Zufallsvariablen komprimiert. Im Anschluss wird eine stochastische Galerkin-Methode benutzt, welche im Hinblick auf die Voraussetzungen für eine eindeutige Lösung analysiert wird.

Mehr zum Elitestudiengang:

🔗 www.elitenetzwerk.bayern.de

🔗 **Master Scientific Computing | University of Bayreuth (uni-bayreuth.de)**